母题 —Grothendieck 的梦想

James S. Milne

摘　要

1964 年， Grothendieck 在给 Serre 的信中引入了 "母题 (Motive)"的概念．后来他写道，在所有他有幸发现的事物中，母题是最充满神秘的，或许将成为最强有力的探索工具 [1]．在此报告中，我将解释什么是母题 [2] 以及为什么 Grothendieck 对其如此看重．

内容

1 拓扑学中的上同调

设 X 为一个实 $2n$ 维紧流形．则有 X 的上同调群

$$H^0(X,\mathbb{Q}),\ldots,H^{2n}(X,\mathbb{Q}),$$

这些群为 $\mathbb{Q}$ 上有限维向量空间且满足 Poincaré 对偶 (H^i 对偶于 H^{2n-i}), Lefschetz 不动点公式等等．上同调群有多种不同的定义方法 — 如用奇异链， Čech 上同调，导出函子 — 但是这些不同的定义方法都给出相同的群 (如果其满足 Eilenberg-Steenrod 公理系)．当 X 是复解析流形时，还有 de Rham 上同调群 $H^i_{\mathrm{dR}}(X)$．这些都是 $\mathbb{C}$ 上向量空间，但这并不给出新的群，因为我们有 [3] $H^i_{\mathrm{dR}}(X)\simeq H^i(X,\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ (然而，当 X 是 Kähler 流形时， de Rham 上同调群具有 Hodge 分解，因而提供了更多的信息 ...)．

2 代数几何学中的上同调

现在考虑代数闭域 k 上的 n 维非奇异射影代数簇 X．即 X 由 k 上的一些多项式定义，非奇异射影条件意味着若 $k=\mathbb{C}$, 则簇上的点 $X(\mathbb{C})$ 构成一个 $2n$ 维紧流形．

[1] 在所有我有幸发现并呈现给世人的数学事物中，母题的实在性对我来说依然是最奇妙，最充满神秘的 — 它甚至是 "几何 "与 "算术 "在深层面上的同一所在．而母题的 "瑜伽 "(即母题的哲学 — 译注) ... 或许是在我作为一个数学家的人生前半期所发现的最强有力的探索工具．

— Grothendieck，《收获与播种》，引言． — 原注

[2] 据说， "Motive"是借用了法国印象派画家塞尚用以描述他的绘画方法的术语，塞尚在作画的时候首先选择一个母题 (在以往的音乐和美术文献中 "Motive"被翻译成 "母题 ")，如人物，静物，景色等等，然后直接研究他对母题的不断变化的感受，最后将对母题的感受实现在画布上． — 译注

[3] 用 $\simeq$ 表示典范同构．还记 $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 为 $M_{\mathbb{Q}}$.— 原注

Weil 关于代数簇上坐标在有限域中的点的个数的工作 ([We]) 促使他提出著名的 "Weil 猜想", 其给出了有限域上方程的解的个数与相应的复系数方程定义的簇的拓扑性质的关系. 特别是, 他发现点的个数似乎可由一个相应的 $\mathbb{C}$ 上的代数簇的 Betti 数所控制. 例如, 对于 p 元域 $\mathbb{F}_p$ 上的亏格为 g 的曲线 X 其点的个数 $|X(\mathbb{F}_p)|$ 满足不等式:

$$||X(\mathbb{F}_p)|-p-1| \leq 2gp^{\frac{1}{2}}, \quad g = X\text{的亏格},$$

Weil 预言 $\mathbb{C}$ 上某些超曲面的 Betti 数能够通过计算 $\mathbb{F}_p$ 上具有相同维数和相同次数的超曲面上的点数来确定 (他的预言被 Dolbeault 证实). 显然大部分猜想可由具有良好性质的代数簇的上同调理论 (如 $\mathbb{Q}$ 系数, 正确的 Betti 数, Poincaré 对偶定理, Lefschetz 不动点定理, ...) 推出. 事实上, 正如我们将看到的, 这种 $\mathbb{Q}$ 的系数上同调理论并不存在, 但在此后的许多年中许多尝试都意在寻找系数在某个特征 0 的域 (不是 $\mathbb{Q}$) 中的好的上同调理论. 最终, 在 60 年代, Grothendieck 定义了 Étale 上同调和晶体上同调, 并证明这种代数方式定义的 de Rham 上同调当域特征为 0 时具有好的性质. 而问题则变成我们有太多的上同调理论!

在 $\mathbb{Q}$ 上, 除了通常的赋值以外, 对每个素数 ℓ 还有如下定义的赋值:

$$|\ell^r \tfrac{m}{n}| = 1/\ell^r, \quad m, n \in \mathbb{Z} \text{ 且不被}\ell\text{整除}.$$

每个赋值都使 $\mathbb{Q}$ 成为一个度量空间, 将其完备化后, 我们得到域 $\mathbb{Q}_2, \mathbb{Q}_3, \mathbb{Q}_5, \ldots, \mathbb{R}$. 对每个不同于 k 的特征的素数 ℓ, Étale 上同调给出上同调群 [4]

$$H^0(X, \mathbb{Q}_\ell), \ldots, H^{2n}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

这都是 $\mathbb{Q}_\ell$ 上有限维向量空间并且满足 Poincaré 对偶, Lefschetz 不动点公式, 等等. 另外还有 de Rham 群 $H^i_{\mathrm{dR}}(X)$, 其为 k 上有限维向量空间, 而且在特征 $p \neq 0$ 时, 有晶体上同调群, 其为某个特征 0 域 (即系数在 k 中的 Witt 向量环的分式域) 上的有限维向量空间.

这些上同调理论不可能相同, 因为它们给出完全不同的域上的向量空间. 但是它们也不是不相关联的, 例如, 由一个正则映射 $\alpha\colon X \to X$ 诱导出的映射 $\alpha^i\colon H^i(X) \to H^i(X)$ 的迹 (trace) 就是一个与上同调理论无关的有理数 [5]. 因此, 各种迹象表明似乎存在着代数定义的上同调群 $H^i(X, \mathbb{Q})$ 使得有 $H^i_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H^i(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ 等等, 但事实却并非如此.

3 为什么不存在代数的 $\mathbb{Q}$- 上同调?

为什么没有代数定义的 $\mathbb{Q}-$ 上同调 (即从代数簇到 $\mathbb{Q}-$ 向量空间的函子) 以诱导出 Grothendieck 所定义的这些不同的上同调?

第一种解释

设 X 是特征 0 的代数闭域 k 上的非奇异射影簇. 当我们取定一个嵌入 $k \to \mathbb{C}$ 时, 我们即得到一个复流形 $X(\mathbb{C})$, 熟知

$$H^i_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$
$$H^i_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_k \mathbb{C} \simeq H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

换句话说, 每个嵌入 $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ 确实在各个上同调群上定义一个 $\mathbb{Q}-$ 结构. 然而, 不同的嵌入可以给出完全不同的 $\mathbb{Q}-$ 结构.

---

[4] 对 p (即 k 的特征) 也有 Étale 上同调群 $H^i(X, \mathbb{Q}_p)$, 但其性质异常; 例如, 当 E 是超奇异椭圆曲线时, $H^1(E, \mathbb{Q}_p) = 0$.— 原注

[5] 目前, 在非零特征的情形对此结论的证明需要用 Deligne[Del] 关于 Weil 猜想的结果. — 原注

为说明这一点，注意因为 X 可由有限个多项式定义从而仅有有限个系数，故存在 k 的子域 k_0 上的模型 X_0 使得 k 是 k_0 的无限 Galois 扩张 — 令 $\Gamma = \mathrm{Gal}(k/k_0)$. 因此模型的选择定义了 Γ 在 $H^i_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的一个作用. 如果 k 到 $\mathbb{C}$ 的不同的 k_0 嵌入给出 $H^i_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 中的相同子空间 $H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, 则 Γ 在 $H^i_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的作用将固定 $H^i(X, \mathbb{Q})$. 但是，无限 Galois 群皆为不可数，而 $H^i(X, \mathbb{Q})$ 可数，这意味着可诱导出 Γ 的一个有限商群在 $H^i_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的作用. 然而，这一般是不对的 [6].

同理可知，能够在 $\mathbb{Q}_\ell-$ 上同调上给出 $\mathbb{Q}-$ 结构的代数定义的上同调将迫使 Γ 诱导出有限商群作用，因此不可能存在.

第二种解释

椭圆曲线 E 即是亏格是 1 且有指定点 (群结构的零元) 的曲线. 在 $\mathbb{C}$ 上， $E(\mathbb{C})$ 同构于 $\mathbb{C}$ 关于一个格 Λ 的商 (因此，从拓扑的角度看它是一个环面). 特别地， $E(\mathbb{C})$ 是一个群， E 的自同态即为由满足 $\alpha\Lambda = \Lambda$ 的复数 α 定义的映射 $z + \Lambda \mapsto \alpha z + \Lambda$. 由此易知， $\mathrm{End}(E)$ 是秩 1 或 2 的 $\mathbb{Z}-$ 模并且 $\mathrm{End}(E)_{\mathbb{Q}}$ 等于 $\mathbb{Q}$ 或为 $\mathbb{Q}$ 的一个 2 次扩域 K. 上同调群 $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 是 2 维 $\mathbb{Q}$- 向量空间，因此在第二种情形其为 1 维 K- 向量空间.

当特征 $p \neq 0$ 时，还有第三种可能性，即 $\mathrm{End}(E)_{\mathbb{Q}}$ 可能是 $\mathbb{Q}$ 上 4 次除代数 (非交换域). 这种除代数能作用于其上的最小的 $\mathbb{Q}$- 向量空间是 4 维的.

因此不存在一种 $\mathbb{Q}-$ 上同调理论以诱导出 Grothendieck 所定义的所有这些不同的上同调理论，但我们又如何阐释种种迹象都显示其似乎存在这一事实呢？ Grothendieck 的回答是母题理论. 在对其讨论前，我们需要解释一下代数链 (algebraic cycle).

4 代数链

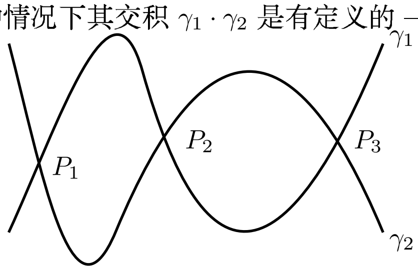
一些定义

设 X 是域 k 上 n 维非奇异射影簇. X 上的素链 (prime cycle) 即为 X 的一个闭子簇 Z 且其不能写成两个真闭子簇的并. 其余维数 (codimemsion) 是 $n - \dim Z$. 如果 Z_1 和 Z_2 都是素链，则

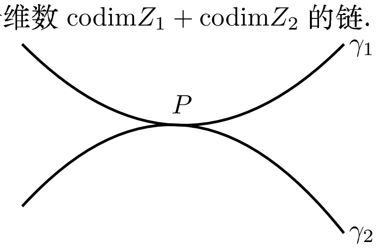
$$\mathrm{codim}(Z_1 \cap Z_2) \leq \mathrm{codim}(Z_1) + \mathrm{codim}(Z_2),$$

当等式成立时我们说 Z_1 和 Z_2 是真相交 (properly intersect).

X 的余维数为 r 的代数链群 $C^r(X)$ 即是由余维数 r 的素链生成的自由 Abel 群. 两个代数链 γ_1 和 γ_2 称为真相交是指 γ_1 的每个素链与 γ_2 的每个素链都真相交，在这种情况下其交积 $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ 是有定义的 — 其为余维数 $\mathrm{codim}Z_1 + \mathrm{codim}Z_2$ 的链. 例如：



$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = P_1 + P_2 + P_3$



$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 2P$

由此，我们得到了部分有定义的映射

$$C^r(X) \times C^s(X) - - > C^{r+s}(X).$$

---

[6] 粗略地说， Tate 猜想说的是，当 k_0 是 $\mathbb{Q}$ 的有限生成扩张时， Galois 群在 $\mathrm{Aut}(H^i_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell))$ 中的像在很大程度上受代数链的存在性的约束. — 原注

为得到在整个集合上有定义的映射，我们需要能够移动代数链． X 的两个链 γ_0 和 γ_1 称为有理等价 (rationally equivalent) 的 [7] 是指存在 $X\times\mathbb{P}^1$ 上的一个代数链 γ 使得 γ_0 是 γ 在 0 上的纤维，而 γ_1 是 γ 在 1 上的纤维．这给出了一个等价关系，我们令 $C^r_{\mathrm{rat}}(X)$ 表示相应的商群．可以证明，交积 (intersection product) 定义了一个双可加映射 [8]

$$C^r_{\mathrm{rat}}(X)\times C^s_{\mathrm{rat}}(X)\to C^{r+s}_{\mathrm{rat}}(X). \tag{1}$$

设 $C^*_{\mathrm{rat}}(X)=\bigoplus_{r=0}^{\dim X}C^r_{\mathrm{rat}}(X)$. 此为一个 $\mathbb{Q}-$ 代数，称为 X 的 Chow 环.

有理等价是能够在等价类上给出映射 (1) 的最细的代数链的等价关系．而最粗的这种等价关系是数值等价 (numerical equivalence): 两个代数链 γ 和 γ' 称为数值等价是指对所有的有补维数 (complementary dimension) 的代数链 δ，，有 $\gamma\cdot\delta=\gamma'\cdot\delta$. 代数链的数值等价类构成环 $C^*_{\mathrm{num}}=\bigoplus_{r=0}^{\dim X}C^r_{\mathrm{num}}(X)$, 其为 Chow 环的商环.

例如，射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上的余维数 1 的素链即是由不可约齐次多项式 $P(X_0,X_1,X_2)$ 定义的曲线．分别由两个多项式定义的素链是有理等价的当且仅当这两个多项式有相同次数．故群 $C^1_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}^2)\simeq\mathbb{Z}$ 且以 $\mathbb{P}^2$ 中任意直线所在的类为基.

$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 中余维数为 1 的素链即为由一个关于每一对符号 (X_0,X_1) 和 (Y_0,Y_1) 皆为可分齐次的不可约多项式 $P(X_0,X_1;Y_0,Y_1)$ 定义的曲线．此链的有理等价类由一对次数所决定．故群 $C^1_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 且以 $\{0\}\times\mathbb{P}^1$ 和 $\mathbb{P}^1\times\{0\}$ 的类为基；对角 $\Delta_{\mathbb{P}^1}$ 与 $\{0\}\times\mathbb{P}^1+\mathbb{P}^1\times\{0\}$ 有理等价.

从现在起， $\sim$ 等于 rat 或 num.

链映射

对所有的我们所感兴趣的上同调理论，皆有链类映射

$$\mathrm{cl}\colon C^*_{\mathrm{rat}}(X)_{\mathbb{Q}}\to H^*(X)\overset{\mathrm{def}}{=}\bigoplus_{r=0}^{2\dim X}H^r(X)$$

其将次数加倍且将交积映为杯积 (cup product).

对应

我们仅对是反变函子的上同调理论感兴趣，即由代数簇的正则映射 $f\colon Y\to X$ 可定义同态 $H^i(f)\colon H^i(X)\to H^i(Y)$. 然而，这是一个匮弱的条件，因为一般来说一个代数簇到另一个代数簇之间的正则映射是很少的．代之，我们应该允许 “多值映射 ”, 或，更确切地说，是 “对应 ”(correspondence).

从 X 到 Y 的 r 次对应群定义为

$$\mathrm{Corr}^r(X,Y)=C^{\dim X+r}(X\times Y).$$

例如，正则映射 $f\colon Y\to X$ 的图 (gragh)Γ_f 属于 $C^{\dim X}(Y\times X)$, 其转置 Γ_f^t 属于 $C^{\dim X}(X\times Y)=\mathrm{Corr}^0(X,Y)$. 换句话说，从 Y 到 X 的一个正则映射定义了一个从 X 到 Y 的 0 次对应 [9].

从 X 到 Y 的一个 0 次对应 γ 定义一个同态 $H^*(X)\to H^*(Y)$, 即

$$x\mapsto q_*(p^*x\cup\mathrm{cl}(\gamma)).$$

这里 p 和 q 是投影映射

$$X\xleftarrow{p}X\times Y\xrightarrow{q}Y.$$

[7] 这是同伦等价的代数类比． — 原注

[8] 特别地，任意两个代数链 γ_1 和 γ_2 都分别有理等价于真相交的代数链 γ_1' 和 γ_2', 并且 $\gamma_1'\cdot\gamma_2'$ 的有理等价类不依赖于 γ_1' 和 γ_2' 的选择． — 原注

[9] 这里逆反方向是不适宜的，但是在某些时候不得不这么做，因为要和 Grothendieck 以及大部分随后的作者保持一致． — 原注

由 Γ_f^t 给出的上同调的映射与由 f 给出的是一致的.

我们采用记号:

$$\mathrm{Corr}^r_\sim(X,Y)=\mathrm{Corr}^r(X,Y)/\!\sim,\quad \mathrm{Corr}^r_\sim(X,Y)_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Corr}^r_\sim(X,Y)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.$$

5 母题的定义

Grothendieck[10] 的想法是，应该存在一个泛上同调理论其取值于由母题构成的 $\mathbb{Q}-$ 范畴 $\mathcal{M}(k)$.

- 因此， $\mathcal{M}(k)$ 应该是一个像有限维 $\mathbb{Q}-$ 向量空间范畴 $\mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}$ 一样的范畴 (但并不完全相似). 特别:
  - Hom 应该是 $\mathbb{Q}-$ 向量空间 (倾向于有限维);
  - $\mathcal{M}(k)$ 应该是一个 Abel 范畴;
  - 进而， $\mathcal{M}(k)$ 应该是一个 $\mathbb{Q}$ 上的 Tannaka 范畴 (见下面).
- 应该存在一个泛上同调理论

  $$X\rightsquigarrow hX\colon(\text{非奇异射影簇})\to\mathcal{M}(k).$$

  特别是:
  - 每个代数簇 X 应该定义一个母题 hX, 每个从 X 到 Y 的零次对应应该定义一个同态 $hX\to hY$ (特别地，一个正则映射 $Y\to X$ 应该定义一个同态 $hX\to hY$).
  - 每个好的上同调理论 [11] 应该能唯一通过 $X\rightsquigarrow hX$ 分解.

初论

我们可简单地将 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 定义为这样的范畴：对 k 上每个非奇异射影簇 X 有对象 hX, 而态射由

$$\mathrm{Hom}(hX,hY)=\mathrm{Corr}^0_\sim(X,Y)_{\mathbb{Q}}$$

定义, 态射的合成即为对应的合成, 所以这是一个范畴. 然而, 这存在着明显的不足. 例如, 一个 $\mathbb{Q}-$ 向量空间 V 的自同态 e, 若满足 $e^2=e$, 则其可将此向量空间分解成其 0 和 1 的特征空间

$$V=\mathrm{Ker}(e)\oplus eV,$$

若 (W,f) 为另一个这样的对，则在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{ - 线性}}(V,W)$ 中有:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{ - 线性}}(eV,fW)\simeq f\circ\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{ - 线性}}(V,W)\circ e.$$

同样的结论在任意 Abel 范畴中亦成立, 因此, 如果我们想让 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 成为 Abel 范畴, 我们至少应该把幂等态射的像也添加到

$$\mathrm{End}(hX)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Corr}^0_\sim(X,X)_{\mathbb{Q}}\stackrel{\mathrm{def}}{=}C^{\dim X}_\sim(X\times X)_{\mathbb{Q}}$$

中.

再论

---

[10] 我称为 k 上的 “母题 ”的是指像 k 上代数概型的 ℓ-adic 上同调群一样的东西，但却认为其与 ℓ 无关，并由代数链理论导出，它具有的 “整 ”结构，或暂称之为 “$\mathbb{Q}$”结构. 令人悲观的事实是尽管对此范畴我正在形成非常缜密的哲学，但是，我暂时还不知道该如何去定义这个由母题构成的 Abel 范畴.

— Grothendieck 给 Serre 的信， 1964 年 8 月 16 日. — 原注

[11] 用专业术语说就是 Weil 上同调理论. — 原注

现在我们定义 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 为这样的范畴，其对象为二元对 $h(X,e)$, 其中 X 如上， e 为环 $\mathrm{Corr}^0_\sim(X,X)_\mathbb{Q}$ 中的幂等元，而态射则由

$$\mathrm{Hom}(h(X,e),h(Y,f)) = f\circ \mathrm{Corr}^0_\sim(X,Y)_\mathbb{Q}\circ e$$

($\mathrm{Corr}^0_\sim(X,Y)_\mathbb{Q}$ 的子集) 定义．这正是要寻找的！这里是关于有理等价还是关于数值等价的有效母题范畴是依赖于 $\sim$ 的选择的，我们将其记为 $\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}_\sim(k)$. 前面定义的母题范畴可看作是由 $h(X,\Delta_X)$ 为对象构成的全子范畴.

例如，上面的讨论表明 $\mathrm{Corr}^0_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^1)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 且 $e_0\overset{\mathrm{def}}{=}(1,0)$ 和 $e_2\overset{\mathrm{def}}{=}(0,1)$ 分别由 $\{0\}\times\mathbb{P}^1$ 和 $\mathbb{P}^1\times\{0\}$ 所代表．相应于分解 $\Delta_{\mathbb{P}^1}\sim e_0+e_2$, 我们可得分解

$$h(\mathbb{P}^1,\Delta_{\mathbb{P}^1}) = h^0\mathbb{P}^1\oplus h^2\mathbb{P}^1 \tag{2}$$

这里 $h^i\mathbb{P}^1=h(\mathbb{P}^1,e_i)$ (这在 $\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{rat}}(k)$ 中和在 $\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{num}}(k)$ 中都成立). 我们记 $\mathbb{1}=h^0\mathbb{P}^1$, $\mathbb{L}=h^2\mathbb{P}^1$.

从某种意义上讲，有效母题范畴是最有用的 [12], 但是一般地人们更倾向于一个在其中每个对象都存在对偶的范畴．这极易通过将 $\mathbb{L}$ 取逆实现.

三论

$\mathcal{M}_\sim(k)$ 的对象现在为三元对 $h(X,e,m)$, 其中 X 和 e 如前，而 $m\in\mathbb{Z}$. 态射定义为

$$\mathrm{Hom}(h(X,e,m),h(Y,f,n)) = f\circ \mathrm{Corr}^{n-m}_\sim(X,Y)_\mathbb{Q}\circ e.$$

这是 k 上母题范畴．前面定义的母题范畴可看作是由 $h(X,e,0)$ 为对象构成的全子范畴.

有时称 $\mathcal{M}_{\mathrm{rat}}(k)$ 为 Chow 母题范畴，而称 $\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$ 为 Grothendieck(或数值) 母题范畴.

6 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 和 $X\rightsquigarrow hX$ 的所知

范畴 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 的已知性质

- 态射集合是 $\mathbb{Q}-$ 向量空间，若 $\sim$ 为 num 则其为有限维的 (但是其他情形一般不是有限维的).
- 母题的直和存在，故 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 是加法范畴．例如
$$h(X,e,m)\oplus h(Y,f,m)=h(X\sqcup Y,e\oplus f,m).$$
- 母题 M 的自同态环中的一个幂等元 f 能将 M 分解为 f 的核与像的直和，故 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 是一个伪 Abel 范畴．例如，若 $M=h(X,e,m)$, 则
$$M=h(X,e-efe,m)\oplus h(X,efe,m).$$
- $\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$ 是 Abel 范畴且为半单范畴，但是 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 一般不是 Abel 范畴，只有在 k 是有限域的代数扩张的情形或许可能是 Abel 范畴 [13].
- $\mathcal{M}_\sim(k)$ 上有好的张量积结构，定义为
$$h(X,e,m)\otimes h(Y,f,n)=h(X\times Y,e\times f,m+n).$$
记 $hX=h(X,\Delta_X,0)$; 则 $hX\otimes hY=h(X\times Y)$, 故对 $X\rightsquigarrow hX$ Künneth 公式成立.

[12] 例如，在探究具有 $\mathbb{Z}$(而不是 $\mathbb{Q}$) 系数的有限域上的有效母题范畴时， Niranjan Ramachandran 和我发现了此范畴中的 Ext 的阶数和 Zeta 函数的特殊值之间的一个优美的关系．但是当从这种有效母题范畴过渡到母题的整个范畴时，这个关系却消失了． — 原注

[13] 一个周知的猜想断言，当 k 是有限域的代数扩张时，自然函子 $\mathcal{M}_{\mathrm{rat}}(k)\to\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$ 是一个范畴等价． — 原注

- 上述结论对有效母题范畴亦成立，但是在 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 中，对象存在对偶．这意味着对每个母题 M 均存在对偶母题 $M^\vee$ 和 "赋值映射" $\mathrm{ev}\colon M^\vee \otimes M \to \mathbb{I}$ 并且满足某种泛性质．例如，当 X 连通时有

$$h(X,e,m)^\vee = h(X,e^t,\dim X - m).$$

应该强调的是，尽管 $\mathcal{M}_{\mathrm{rat}}(k)$ 不是 Abel 范畴，但依然是非常重要的范畴．特别是，它比 $\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$ 包含了更多的信息．

$X \rightsquigarrow hX$ 是泛上同调理论吗？

当然，函子 $X \rightsquigarrow hX$ 将 X 映为其 Chow 母题是有泛性质的．这几近赘述：好的上同调理论即为可通过 $\mathcal{M}_{\mathrm{rat}}(k)$ 进行分解的理论．

然而对于 $\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$ 却存在着问题：一个数值等价于零的对应将给出母题间的零映射，但是一般地我们并不知道其是否在上同调上也定义零映射．为使一个好的上同调理论能通过 $\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$ 进行分解，其须满足下述猜想：

猜想 D 如果一个代数链数值等价于零，则其上同调类也是零．

换句话说，若 $\mathrm{cl}(\gamma) \neq 0$, 则 γ 不会数值等价于零．结合 Poincaré 对偶，我们可重述为：如果存在上同调类 γ' 满足 $\mathrm{cl}(\gamma) \cup \gamma' \neq 0$, 则存在一个代数链 γ'' 满足 $\gamma \cdot \gamma'' \neq 0$. 因此，此猜想是一个关于代数链的存在性断言．不幸的是，我们尚无方法能够证明代数链的存在性．更具体地说，当我们期望一个上同调类是代数的，即是代数链类，我们尚无途径能给出具体证明．这是一个主要问题，至少是算术几何和代数几何中的主要问题．

在特征为零时，猜想 D 对 Abel 簇是对的，猜想 D 可由 Hodge 猜想推出．

为什么 hX 不是分次的？

当我们假设猜想 D 成立时，好的上同调理论 H 确实能通过 $X \rightsquigarrow hX$ 分解．这意味着存在从 $\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$ 到 H 的基域上的向量空间范畴的函子 ω 使有：

$$\omega(hX) = H^*(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{i=0}^{2\dim X} H^i(X).$$

显然应该存在 hX 的一个分解使其能够统一诱导出每个好的上同调理论所具有的 $H^*(X)$ 分解．对于 $\mathbb{P}^1$, 由 (2) 知这是对的．下述猜想是由 Grothendieck 提出的．

猜想 C 在环 $\mathrm{End}(hX) = C_{\mathrm{num}}^{\dim X}(X \times X)$ 中，对角 Δ_X 可典范地分解成幂等元之和：

$$\Delta_X = \pi_0 + \cdots + \pi_{2\dim X}. \tag{3}$$

此表示式决定一个分解

$$hX = h^0X \oplus h^1X \oplus \cdots \oplus h^{2\dim X}X, \tag{4}$$

这里 $h^iX = h(X,\pi_i,0)$, 此分解应该有这样的性质，即对每个满足猜想 D 的好的上同调理论分解 (4) 给出如下分解：

$$H^*(X) = H^0(X) \oplus H^1(X) \oplus \cdots \oplus H^{2\dim X}(X).$$

此猜想也是关于代数链的存在性的断言，因此是很困难的．对于有限域上的非奇异射影簇 (此时某种 Frobenius 映射的多项式可用于分解母题) 和特征零的 Abel 簇 (由定义知 Abel 簇具有交换群结构，映射 $m\colon X \to X$, $m \in \mathbb{Z}$, 可用于分解 hX) 这是对的．

假如猜想 C 是对的，则可谈论母题的权 (weight). 例如，母题 h^iX 的权为 i, 而 $h(X,\pi_i,m)$ 的权为 $i-2m$. 母题称为是纯粹的 (pure) 是指其具有单一的权 (single weight). 每个母题都是纯粹母题的直和．

只有证明了猜想 C 和猜想 D, Grothendieck 的梦想才能得以实现．

附注 6.1 Murre[Mu] 曾经猜测分解 (3) 即使在 $C_{\mathrm{rat}}^{\dim X}(X\times X)$ 中也是存在的．已证明他的猜想等价于 Beilinson 和 Bloch 关于 Chow 群上的一个有趣的滤链的存在性猜想.

什么是 Tannaka 范畴 (Tannakian category)？

所谓仿射群，是指一个矩阵群 (可能是无限维的)[14]. 对于 $\mathbb{Q}$ 上的仿射群 G, 其在有限维 $\mathbb{Q}-$ 向量空间上的表示的全体构成一个带有张量积和对偶的 Abel 范畴 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G)$, 而遗忘函子则是一个从 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G)$ 到 $\mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}$ 的保持张量积的忠实函子 (faithful functor).

$\mathbb{Q}$ 上的一个中性的 Tannaka 范畴 (neutral Tannakian category)T 是指一个 Abel 范畴，其带有张量积和对偶并存在到 $\mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}$ 的保持张量积的忠实的正合函子；这样一个函子 ω 的张量积自同构构成一个仿射群 G, 并且函子 ω 的选取决定了范畴的等价 $\mathsf{T}\to\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G)$. 因此，一个中性的 Tannaka 范畴即是一个没有指定 "遗忘" 函子的仿射群的表示范畴的抽象形式 (正如向量空间是 k^n 的没有指定基的抽象形式一样).

$\mathbb{Q}$ 上的一个 Tannaka 范畴 T(未必是中性的) 是指一个 Abel 范畴，其带有张量积和对偶并存在到某特征零的域 (未必是 $\mathbb{Q}$) 上的向量空间范畴且保持张量积的忠实的正合函子；我们还要求 $\mathrm{End}(\mathbb{1})=\mathbb{Q}$ 成立；这样的函子的选取给出了 T 到仿射群胚范畴的一个范畴等价.

$\mathcal{M}_{\mathbf{num}}(k)$ 是 Tannaka 范畴吗？

不，不是 Tannaka 范畴．在一个带有张量积和对偶的 Abel 范畴 T 中是可以定义一个对象的自同态的迹的．其将被任何忠实的正合函子 $\omega\colon\mathsf{T}\to\mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}$ 所保持，因此对于对象 M 的恒等映射 u, 有

$$\mathrm{Tr}(u|M)=\mathrm{Tr}(\omega(u)|\omega(M))=\dim_{\mathbb{Q}}\omega(M),$$

此为向量空间的维数，故为非负整数．对于簇 X 的恒等映射 u, $\mathrm{Tr}(u|hX)$ 即为 X 的 Euler-Poincaré 特征 (Betti 数的交错和). 例如，若 X 是亏格 g 的曲线，则有

$$\mathrm{Tr}(u|hX)=\dim H^0-\dim H^1+\dim H^2=2-2g,$$

这可以是负的．这证明不存在正合的忠实张量函子 $\omega\colon\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)\to\mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}$.

为修正这一点，我们不得不变动张量积结构的内在机理．假设猜想 C 成立，则每个母题有分解 (4). 如果当 ij 为奇数时，我们改变 "典范" 同构

$$h^iX\otimes h^jX\simeq h^jX\otimes h^iX$$

的负号，则 $\mathrm{Tr}(u|h(X))$ 就变成了 X 的 Betti 数的和而不是交错和．这样 $\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$ 就成为一个 Tannaka 范畴 (若 k 特征为零则其为中性，但其他情形不然). 因此，当 k 是有限域的代数扩张时， $\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$ 是非中性的 Tannaka 范畴 (但是，由于猜想 D 尚未被证实，所以我们不知道标准的上同调是否可通过其进行分解).

7 重温 Weil 猜想

Zeta 函数

设 X 是 $\mathbb{F}_p$ 上的非奇异射影簇，固定 $\mathbb{F}_p$ 的一个代数闭包 $\mathbb{F}$. 对每个 m, $\mathbb{F}$ 有唯一的 p^m 元子域 $\mathbb{F}_{p^m}$. 记 $X(\mathbb{F}_{p^m})$ 为 X 上坐标在 $\mathbb{F}_{p^m}$ 中的点的集合，此为有限集合． X 的 Zeta 函数 $Z(X,t)$ 定义为

$$\log Z(X,t)=\sum\nolimits_{m\geq 1}|X(\mathbb{F}_{p^m})|\frac{t^m}{m}.$$

[14] 更确切地说，一个仿射群是域上的一个仿射群概型 (未必是有限型的). 每个这样的群都是那些能够实现为某 GL_n 的子群的仿射代数群概型的逆极限． — 原注

例如，设 $X=\mathbb{P}^0=$ 单点．则对任意的 m 有 $|X(\mathbb{F}_{p^m})|=1$, 故

$$\log Z(X,t)=\sum\nolimits_{m\geq 1}\frac{t^m}{m}=\log\frac{1}{1-t};$$

因此

$$Z(X,t)=\frac{1}{1-t}.$$

作为第二个例子，设 $X=\mathbb{P}^1$. 则 $|X(\mathbb{F}_{p^m})|=1+p^m$, 故

$$\log Z(X,t)=\sum(1+p^m)\frac{t^m}{m}=\log\frac{1}{(1-t)(1-pt)};$$

因此

$$Z(X,t)=\frac{1}{(1-t)(1-pt)}.$$

Weil 的奠基性的工作

40 年代， Weil 证明对于 $\mathbb{F}_p$ 上亏格 g 的曲线 X, 有：

$$Z(X,t)=\frac{P_1(t)}{(1-t)(1-pt)},\quad P_1(t)\in\mathbb{Z}[t], \tag{5a}$$

$$P_1(t)=(1-a_1t)\cdots(1-a_{2g}t)\quad 其中|a_i|=p^{\frac{1}{2}}. \tag{5b}$$

特别地，这说明有

$$|X(\mathbb{F}_p)|=1+p-\sum\nolimits_{i=1}^{2g}a_i.$$

故

$$||X(\mathbb{F}_p)|-p-1|=|\sum\nolimits_{i=1}^{2g}a_i|\leq 2gp^{\frac{1}{2}}.$$

Weil 关于这些结论的证明本质上用到曲线的 Jacobi 簇．对于 $\mathbb{C}$ 上亏格 g 的曲线 X, $X(\mathbb{C})$ 即为亏格 g 的 Riemann 曲面，故 $X(\mathbb{C})$ 上的全纯微分构成一个 g 维复向量空间 $\Omega^1(X)$, 并且同调群 $H_1(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ 是秩 $2g$ 的自由 $\mathbb{Z}-$ 模． $H_1(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ 的一个元素 γ 定义了 $\Omega^1(X)$ 的对偶向量空间 $\Omega^1(X)^\vee$ 中的一个元素 $\omega\mapsto\int_\gamma\omega$. 从 Abel 和 Jacobi 的时代就已经知道此映射将 $H_1(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ 实现为 $\Omega^1(X)^\vee$ 中的一个格 Λ, 故商 $J(X)=\Omega^1(X)^\vee/\Lambda$ 是复环面 — 选择 $\Omega^1(X)$ 的一个基即可定义一个同构 $J(X)\approx\mathbb{C}^g/\Lambda$. $J(X)$ 的自同态是 $\Omega^1(X)^\vee$ 的将 Λ 映为自身的线性自同态，由此知 $\mathrm{End}(J(X))$ 是有限生成 $\mathbb{Z}-$ 模. 所以 $\mathrm{End}(J(X))_\mathbb{Q}$ 是一个有限秩的 $\mathbb{Q}$ 代数． X 的任何极化 (polarization) 定义 $\mathrm{End}(J(X))_\mathbb{Q}$ 的一个对合 (involution) $\alpha\mapsto\alpha^\dagger$, 由于对任意非零 α 迹 $\mathrm{Tr}(\alpha\alpha^\dagger)>0$, 故其为正定.

复环面 $J(X)$ 是一个代数簇． 40 年代，在 Weil 研究这些问题的时候，尚不知如何定义不同于 $\mathbb{C}$ 的域上的曲线的 Jacobi 簇．事实上，那个年代的代数几何基础尚不适合于这项工作，因此，为了使他对 (5a,5b) 证明能基于坚实的基础，他不得不首先重写代数几何的基础，然后在任意域上发展 Jacobi 簇的理论.

对于 $\mathbb{F}_p$ 上的任意簇 X, 存在一个正则映射 $\pi\colon X\to X$ (称为 Frobenius 映射), 其在点上的作用为 $(a_0:\ldots:a_n)\mapsto(a_0^p:\ldots:a_n^p)$, 并且具有性质： π^m 在 $X(\mathbb{F})$ 上作用的不动点恰为 $X(\mathbb{F}_{p^m})$ 中的元素． Weil 证明了不动点公式，这使他得以证明，对于 $\mathbb{F}_p$ 上的曲线 X , $Z(X,t)=P_1(t)/(1-t)(1-pt)$, 其中 $P_1(t)$ 等于 π 在 $J(X)$ 上作用的特征多项式，并且他知道此多项式具有整系数．极化的选择定义了 $\mathrm{End}(J(X))_\mathbb{Q}$ 上的一个对合， Weil 证明其为正定．由此他能够推出不等式 $|a_i|<p^{\frac{1}{2}}$.

Weil 猜想的陈述

Weil 关于曲线和其他簇的结果启发了下述猜想：对于 $\mathbb{F}_p$ 上的 n 维非奇异射影簇 X, 有

$$Z(X,t)=\frac{P_1(t)\quad\cdots\quad P_{2n-1}(t)}{(1-t)P_2(t)\cdots P_{2n-2}(t)(1-p^nt)},\quad P_i(t)\in\mathbb{Z}[t], \tag{6a}$$

$$P_i(t)=(1-a_{i1}t)\cdots(1-a_{ib_i}t)\quad \text{这里}|a_{ij}|=p^{i/2}; \tag{6b}$$

进而，如果 X 来自于 $\mathbb{Q}$ 上的簇 $\tilde{X}$ 的模 p 约化，则 b_i (P_i 的次数) 应是复流形 $\tilde{X}(\mathbb{C})$ 的 Betti 数.

标准猜想 (standard conjecture) 和 Weil 猜想

在 Grothendieck 定义他的 Étale 上同调群的时侯，他和合作者们证明了一个不动点定理，这使他们得以证明 $Z(X,t)$ 可表为形式 (6a), 其中 P_i 等于 Frobenius 映射 π 在 $H^i_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 上作用的特征多项式. 然而，尚不能断定多项式 P_i 的系数在 $\mathbb{Z}$ 中，而只能断定在 $\mathbb{Q}_\ell$ 中，并且不能排除其或许会依赖于 ℓ.

1968 年， Grothendieck 提出了两个猜想，分别被称为 Lefschetz 标准猜想和 Hodge 标准猜想. 如果这些猜想能得以证实，则人们就可以通过用簇的母题理论替代曲线的 Jacobi 来将 Weil 关于曲线情形的 Weil 猜想的证明扩展到任意维的代数簇的情形.

上述的猜想 C 是 Lefschetz 标准猜想的弱形式. 如上所知，此猜想连周知的猜想 D 将意味着存在一个好的母题理论，还将意味着 (6a) 式成立并且 $P_i(t)$ 是 π 作用在母题 h^iX 上的特征多项式. 特别是， $P_i(t)$ 的系数在 $\mathbb{Q}$ 中，不依赖于 ℓ, 简单的讨论进而会证明其系数在 $\mathbb{Z}$ 中.

Hodge 标准猜想是一个正面的断言，其意味着每个母题的自同态代数具有一个 正定 的对合. 假如这是对的，则由 Weil 的讨论方法即能证明 (6b).

在特征零的情形， Hodge 标准猜想可用解析方法证明，但在非零特征的情形，仅对很少的簇知其成立. 然而，其亦可由 Hodge 猜想和 Tate 猜想推得 [Mi].

Deligne[Del] 用了一个非常巧妙的办法成功地完成了 Weil 猜想的证明，但其证明不用标准猜想. 因此， Grothendieck 的话 ([Gr] p.198):

> 标准猜想的证明连同奇异消解问题 [非零特征的情形] 对我来说似乎是
> 代数几何中最紧迫的任务.

至今依然正确.

8 母题的 Zeta 函数

$\mathbb{Q}$ 上的簇的 Zeta 函数

假设 X 是 $\mathbb{Q}$ 上非奇异射影簇. 我们先将定义 X 的多项式去分母使其具有整系数，然后将这些方程模素数 p, 即得 $\mathbb{F}_p$ 上的一个射影簇 X_p. 如果 X_p 仍然是非奇异的，则称 p 是 "好的 ". 除有限个以外，所有的素数都是好的，我们定义 X 的 Zeta 函数为 [15]

$$\zeta(X,s)=\prod_{\text{好的}p} Z(X_p,p^{-s}).$$

例如，当 $X=\mathbb{P}^0=$ 单点时，

$$\zeta(X,s)=\prod\nolimits_p \frac{1}{1-p^{-s}},$$

[15] 还应该包含对应于 "坏 "素数和实数的因子. 以下我将忽略有限多个因子. — 原注

这是 Riemann Zeta 函数 $\zeta(s)$; 当 $X=\mathbb{P}^1$ 时,

$$\zeta(X,s)=\prod_p \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{1-s})}=\zeta(s)\zeta(s-1).$$

考虑 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线 E. 对好的 p, 有

$$Z(E_p,t)=\frac{(1-a_pt)(1-\bar{a}_pt)}{(1-t)(1-pt)},\quad a_p+\bar{a}_p\in\mathbb{Z},\quad a_p\bar{a}_p=p,\quad |a_p|=p^{1/2}$$

(见 5a,5b). 故

$$\zeta(E,s)=\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{L(E,s)}$$

其中

$$L(E,s)=\prod_p \frac{1}{(1-a_pp^{-s})(1-\bar{a}_pp^{-s})}.$$

母题的 Zeta 函数

首先考虑 $\mathbb{F}_p$ 上的母题. 我们不能用一个母题 M 的坐标在域 $\mathbb{F}_{p^m}$ 中的点来定义 $\mathbb{F}_p$ 上的母题 M 的 Zeta 函数, 因为这根本没有定义. 然而, 我们知道 $\mathcal{M}(\mathbb{F}_p)$ 是 Tannaka 范畴. 在任何 Tannaka 范畴中, 对象的自同态具有特征多项式. 如果 i 是奇数, 则我们定义 $\mathbb{F}_p$ 上权的为 i 的纯粹母题 M 的 Zeta 函数 $Z(M,t)$ 为 M 的 Frobenius 映射的特征多项式, 如果 i 是偶数则定义 $Z(M,t)$ 为其倒数. 首先, 此特征多项式的系数在 $\mathbb{Q}$ 中, 如果 M 是有效的, 则系数在 $\mathbb{Z}$ 中. 对于有相同权的母题 M_1 和 M_2 有

$$Z(M_1\oplus M_2,t)=Z(M_1,t)\cdot Z(M_2,t), \tag{7}$$

用此公式即可将定义扩展到所有的母题.

这是如何与簇的 Zeta 函数相联系的呢？设 X 是 $\mathbb{F}_p$ 上 n 维光滑射影簇. 如上所知, Grothendieck 和他的合作者们证明了 $Z(X,t)=P_1(t)\cdots P_{2n-1}(t)/P_0(t)\cdots P_{2n}(t)$ 其中 $P_i(t)$ 是 X 的 Frobenius 映射作用在 Étale 上同调群 $H^i_{\mathrm{et}}(X_{\mathbb{F}},\mathbb{Q}_\ell)$ 上的特征多项式 (这里是对任意素数 $\ell\neq p$; 因此, $P_i(t)$ 可能依赖于 ℓ). 现假设对 ℓ-adic Étale 上同调猜想 D 成立, 则存在函子 $\omega\colon\mathcal{M}(\mathbb{F}_p)\to\mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}_\ell}$ 使得 $\omega(h^iX)=H^i_{\mathrm{et}}(X_{\mathbb{F}},\mathbb{Q}_\ell)$. 此函子保持特征多项式, 这表明有 [16] $Z(h^iX,t)=P_i(X,t)^{(-1)^{i+1}}$. 故,

$$Z(X,t)=Z(h^0X,t)\cdots Z(h^{2n}X,t).$$

由 (4) 和 (7), 我们知道此等式右边等于 $Z(hX,t)$, 故 $Z(X,t)=Z(hX,t)$.

$\mathbb{Q}$ 上的母题 M 可以由一个 $\mathbb{Q}$ 上的射影光滑簇 X, 一个 $X\times X$ 上的代数链 γ, 和一个整数 m 所刻画. 除去有限多个以外, 对所有的素数 p, 约化 X 和 γ 可给出 $\mathbb{F}_p$ 上的母题 M_p, 因此我们可以定义

$$\zeta(M,s)=\prod_{\text{好的}p} Z(M_p,p^{-s}).$$

例如,

$$\zeta(h^0(\mathbb{P}^1))=\zeta(s),\quad \zeta(h^2(\mathbb{P}^1))=\zeta(s-1).$$

对椭圆曲线 E,

$$hE=h^0E\oplus h^1E\oplus h^2E.$$

[16] 特别是, $P_i(X,t)$ 是 $\mathbb{Z}$ 系数的多项式, 其不依赖于 ℓ. 这表明由猜想 C 和 D 可推出 (6a), 这独立于 Deligne 的工作. — 原注

故

$$\begin{aligned}\zeta(hE,s) &= \zeta(h^0E,s)\cdot\zeta(h^1E,s)\cdot\zeta(h^2E,s)\\ &= \zeta(s)\cdot L(E,s)^{-1}\cdot\zeta(s-1).\end{aligned}$$

注意，在没有假设任何未被证明的猜想的情况下，我们定义了 $\mathbb{Q}$ 上的母题范畴，并对此范畴中的每个对象赋予一个 Zeta 函数．这是一个复变量 s 的函数，人们猜想它有许多奇妙的性质．如此产生的函数称为母题的 $L-$ 函数 (motivic L-function)．另一方面，可以用完全不同的方法，即从模形式，自守形式，或更一般地，从自守表示来构造函数 $L(s)$ — 称为自守 $L-$ 函数，其定义不用代数几何．下面是 Langlands 纲领中的一个具有指导意义的基本原则：

模性大猜想 (Big Modularity Conjecture) 每个母题的 L- 函数都是自守 $L-$ 函数的交错积 (alternating product).

设 E 是 $\mathbb{Q}$ 上椭圆曲线．模性 (小) 猜想说的是，$\zeta(h^1E,s)$ 是模形式的 Mellin 变换．Wiles (等人) 对此猜想的证明是 Fermat 大定理的证明中的主要步骤.

9 Birch-Swinnerton-Dyer 猜想和一些神秘的平方

设 E 是 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线．大约从 1960 年开始， Birch 和 Swinnerton-Dyer 便使用一种早期的计算机 (EDSAC 2) 研究 $L(E,s)$ 在 $s=1$ 附近的情况．计算结果激发了他们的著名猜想．记 $L(E,1)^*$ 为 $L(E,s)$ 关于 $s-1$ 的幂级数展开式中的第一个非零系数；则他们的猜想断言

$$L(E,1)^* = \{\text{已知项}\}\cdot\{\text{神秘项}\}.$$

其中神秘项被猜想是 E 的 Tate-Shafarevich 群的阶数，已经知道其 (如果是有限的) 为平方数.

大约与此同时，他们研究了

$$L_3(E,s) = \prod\nolimits_p \frac{1}{(1-a_p^3p^{-s})(1-\bar{a}_p^3p^{-s})}$$

在 $s=2$ 附近的情况．通过计算，他们发现：

$$L_3(E,1)^* = \{\text{已知项}\}\cdot\{\text{神秘平方 }\}.$$

其中神秘的平方项可以很大，例如 2401. 这究竟是什么呢？

如上所知， $L(E,s)^{-1}=\zeta(h^1E,s)$. 我们可将 Birch-Swinnerton-Dyer 的猜想看做是关于 h^1E 的断言．此猜想已被扩展到 $\mathbb{Q}$ 上的所有母题．可以证明存在母题 M 使得：

$$h^1(E)\otimes h^1(E)\otimes h^1(E) = 3h^1(E,\Delta_E,-1)\oplus M$$

以及

$$\zeta(M,s) = L_3(E,s)^{-1}.$$

因此，这神秘的平方项被猜想是母题 M 的 “Tate-Shafarevich 群 ”.

10 后注

严格地讲， $\mathcal{M}(k)$ 应该被称为 纯粹 母题范畴．其对应于 k 上非奇异射影簇．Grothendieck 还预言存在混合母题 (mixed motive) 范畴，其对应于 k 上 所有的 簇构成的范畴．此范畴不再是半单的，但是每个混合母题应有一个滤链，其因子 (quotient) 皆为纯粹母题．目前尚无混合母题范畴的明确定义，甚至连猜想的定义也没有，但是一些数学家已经构造了一些三角化范畴以作为混合母题范畴的导出范畴的候选范畴；当然还需在这些候选范畴之一上定义一个 t- 结构以使其中心为混合母题范畴自身.

相关文献

Grothendieck 自己并没有发表任何关于母题的文章，但是在他未发表的手稿 [17] 中以及他和 Serre [GS] 的通信中却经常提到母题．最早解释这一理论的是 Demazure 的文章 [Dem] 和 Kleiman 的文章 [Kl]．会议论文集 [Mot] 则综述了到 1991 年为止关于母题的所知结果和进展．特别是，其中 Kleiman 的文章讨论了 Grothendieck 的标准猜想， Scholl 的文章论述了母题范畴的构造，作者的第一篇文章 (特别是 2.48) 解释了标准猜想对 Weil 猜想的应用．著作 [Ma] 以及 Geisser 和 Levine 在 [KT] 中的文章论述了混合母题方面的最新工作．另外， André 的书 [An] 是目前关于母题理论的最好的一般性导引．

参考文献

[An] André, Y., Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes). Panoramas et Synthèses, 17. Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[Del] Deligne, P., La conjecture de Weil. I. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 273–307. MR0340258

[Dem] Demazure, M., Motifs des variétés algébriques, Sem Bour 1969/70, 365, 20pp.

[Gr] Grothendieck, A., Standard conjectures on algebraic cycles. 1969 Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968) pp. 193–199 Oxford Univ. Press, London MR0268189

[GS] Correspondance Grothendieck-Serre. Edited by Pierre Colmez and Jean-Pierre Serre. Documents Mathématiques (Paris), 2. Société Mathématique de France, Paris, 2001. (English translation published by the AMS, 2004).

[Kl] Kleiman, S. L., Motives. Algebraic geometry, Oslo 1970 (Proc. Fifth Nordic Summer-School in Math., Oslo, 1970), pp. 53–82. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972. MR0382267

[KT] Handbook of K-theory. Vol. 1, 2. Edited by Eric M. Friedlander and Daniel R. Grayson. Springer-Verlag, Berlin, 2005. MR2182598

[Ma] Mazza, C., Voevodsky, V., and Weibel, C., Lecture notes on motivic cohomology. Clay Mathematics Monographs, 2. American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006. MR2242284

[Mi] Milne, J. S., Polarizations and Grothendieck's standard conjectures. Ann. of Math. (2) 155 (2002), no. 2, 599–610. MR1906596

[Mot] Motives. Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference held at the University of Washington, Seattle, Washington, July 20–August 2, 1991. Edited by Uwe Jannsen, Steven Kleiman and Jean-Pierre Serre. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 55. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[Mu] Murre, J. P., On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety. I. The general conjectures and some examples. Indag. Math. (N.S.) 4 (1993), no. 2, 177–188. MR1225267

[We] Weil, A., Numbers of solutions of equations in finite fields. Bull. Amer. Math. Soc. 55, (1949). 497–508. MR0029393

(翻译：徐克舰；校对：付保华)

[17] www.grothendieckcircle.org/.— 原注