ETUDE D'UNE CLASSE D'ISOGENIE

par

J.S. MILNE

Soient E un corps de nombre totalement réel de degré d sur $\mathbb{Q}$*, B une algèbre de quaternion totalement indéfinie sur E,* O_B *un ordre maximal de B, et p un nombre premier (E est noté F dans* [1], [3]*). Nous supposons que* $p = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_m$ *dans E avec les* $\mathfrak{p}_i$ *distincts, et que, si* E_i *est le complété de E à la place* $\mathfrak{p}_i$*, alors* $B \otimes_E E_i$ *est déployée, enfin que* $K = K^p\, G(\mathbb{Z}_p)$ *où* $K^p = K \cap G(\mathbb{A}_f^p)$*. Fixons une variété abélienne A sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *de dimension 2d et un homomorphisme* $i : O_B \longrightarrow End(A)$ *tel que* $i(1) = 1$*. On va décrire l'ensemble Y de toutes les classes d'isomorphisme de triples* $(A', i', \overline{\varphi})$ *avec A' une variété abélienne sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$*, i' un homomorphisme* $O_B \longrightarrow End(A')$*, et* $\overline{\varphi}$ *une classe de K-équivalence d'isomorphismes* $\varphi : T_f^p A' \xrightarrow{\sim} V(\mathbb{Z}_f^p)$ *; on exige que* (A',i') *soit isogène à* (A,i) *et que l'espace tangent* $\underline{\underline{t}}_{A'}$ *à A' en l'origine satisfasse à la condition suivante :*

(*) les sous espaces de $\underline{\underline{t}}_{A'}$ *définis par les idempotents* $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ *de* $O_B \otimes \overline{\mathbb{F}}_p \approx M_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ *sont des* $O_E \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$*-modules libres de rang 1.*

D'après [1], [3]*, il y a lieu de distinguer les deux cas suivants :*

(NS) Le commutant de B dans $End^O(A)$ *est un corps E' totalement imaginaire de degré deux sur E qui déploie B; A(p) est isogène à un produit* $A(\mathfrak{p}_1) \times \cdots \times A(\mathfrak{p}_m)$ *avec* $A(\mathfrak{p}_i)$ *un groupe p-divisible de hauteur* $2d_i = 2\,[E_i : \mathbb{Q}_p]$ *; si* $\mathfrak{p}_i$ *est décomposé dans E' en* $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_i'$*, alors* $A(\mathfrak{p}_i) \sim A(\mathfrak{P}_i) \times A(\mathfrak{P}_i')$ *où* $A(\mathfrak{P}_i)$ *a pour pente* k_i/d_i *et* $A(\mathfrak{P}_i')$ *a pour pente* $(d_i - k_i)/d_i = k_i'/d_i$ *; sinon* $A(\mathfrak{p}_i)$ *a pour pente 1/2, et l'on pose* $k_i = d_i/2 = k_i'$*.*

(S) Le commutant de B dans $End^O(A)$ *est une algèbre de quaternions B' sur E ; A est isogène à une puissance* $A \sim A_O^{2d}$ *d'une courbe elliptique supersingulière* A_O*.*

In: Variétés de Shimura et fonctions L (L. Breen + J.P. Labesse)
Publications mathématiques de l'Université Paris VII (1979), 73-81.

1. <u>Lemme</u> : *Soit $T \subset T_f A$ tel que $T_f A/T$ est fini ; alors il existe une isogénie unique $\alpha : A' \longrightarrow A$ telle que l'image de $T_f\alpha$ est T.*

<u>Démonstration</u> : Puisque $T_f A/T$ est fini, le conoyau N de $T/nT \longrightarrow T_f A/nT_f A$ est indépendant de n pour n suffisamment grand. Choisissons tel un n et soit φ l'application surjective $A_n = T_f A/nT_f A \longrightarrow N$. Pour que $\alpha : A' \longrightarrow A$ soit une isogénie avec $T_f\alpha(T_f A') = T$, il faut et il suffit que $Ker(\alpha) = N$, et que φ soit l'application $A_n \longrightarrow N$ que le lemme ~~sur~~ du serpent définit à partir du diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "0"] & A' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "n"] & A \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Rappelons que pour une variété abélienne A, $Ext^r(A, G_m) = 0$ pour $r \neq 1$ et $Ext^1(A, G_m)$ est la variété abélienne $\hat{A}$ duale à A ; de plus $\hat{\hat{A}} = A$. Ainsi la donnée de α équivaut à celle de $\hat{\alpha} : \hat{A} \longrightarrow \hat{A}'$ telle que $Ker(\hat{\alpha}) = \hat{N}$ (où $\hat{N}$ désigne le dual de Cartier de N) et telle que $\hat{N} \hookrightarrow \hat{A}_n$ est $\hat{\varphi}$. On doit prendre $\hat{A}' = \hat{A}/\hat{N}$.

Puisque $V_f^p A$ est libre de rang un sur $B \otimes \mathbb{Z}_f^p$, $T_f^p A$ contient un réseau isomorphe à $V(\mathbb{Z}_f^p)$, et l'on peut choisir la paire (A,i) initiale telle qu'il existe un isomorphisme $\varphi_A : T_f^p A \xrightarrow{\approx} V(\mathbb{Z}_f^p)$.

Soit $A(\infty) = \bigcup_n A_n$. On désigne par $V_f A$ le système projectif "$\varprojlim$" $A(\infty)^{(n)}$ $= \ldots \longleftarrow A(\infty)^{(n)} \xleftarrow{m} A(\infty)^{(mn)} \longleftarrow \ldots$ où $A(\infty)^{(n)} = A(\infty)$ pour tout n. On a $T_f A \subset V_f A$. (Sur $\mathbb{C}$ on peut identifier $T_f A$ avec $H_1(A,\mathbb{Z}) \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ et $V_f A$ avec $T_f A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$). Un <u>réseau</u> Λ dans $V_f A$ est un sous-objet "$\varprojlim$" $\Lambda^{(n)}$ tel que $m\Lambda^{(mn)} = \Lambda^{(n)}$ pour tous m et n et tel que $m_o\Lambda$ est contenu dans $T_f A$ pour un certain m_o et définisse un quotient fini $T_f A/m_o\Lambda$. On peut écrire $V_f A = V_f^p A \times V_p A$ avec $V_p A = \text{"}\varprojlim_n\text{"}\, A(p)^{(p^n)}$, et alors un réseau Λ se décompose en un produit $\Lambda = \Lambda^p \times \Lambda_p$ avec $\Lambda^p = \Lambda \cap V_f^p A$ et $\Lambda_p = \Lambda \cap V_p A$. Soit X l'ensemble de toutes les paires $(\Lambda, \overline{\psi})$ avec Λ un réseau dans $V_f A$ et $\overline{\psi}$ une classe de

K-équivalence d'isomorphismes $\psi : \Lambda^p \longrightarrow V(\mathbb{Z}_f^p)$ *qui satisfait aux conditions suivantes :*

(a) Λ *est stable sous l'action évidente de* O_B *sur* $V_f A$ *;*

(b) si $D(\Lambda/p\Lambda)$ *est le module de Dieudonné du groupe fini* $\Lambda/p\Lambda$ *alors* $D(\Lambda/p\Lambda)/FD(\Lambda/p\Lambda)$ *vérifie la condition (*).*

Si α *est un élément de* $End^O(A)$ *tel que* $m\alpha \in End(A)$*, alors on définit* $V_f\alpha : V_f A \longrightarrow V_f A$ *comme étant la famille d'applications* $\{A(\infty)^{(mn)} \xrightarrow{m\alpha} A(\infty)^{(n)}\}$*. De manière correspondante, on a une action de* $End^O(A)$ *sur X définie par :* $\alpha(\Lambda,\overline{\psi}) = ((V_f\alpha)\Lambda, \overline{\psi \circ V_f(\alpha)^{-1}})$.

<u>2. Lemme</u> : Il existe une bijection canonique

$$End^O(A)\backslash X \xrightarrow{\approx} Y.$$

<u>Démonstration</u> : Soit $(\Lambda,\psi) \in X$ *tel que* $m\Lambda \subset T_f A$*. On choisit* $(A',i',\overline{\varphi})$ *tel qu'il existe une isogénie* $\alpha : A' \longrightarrow A$ *avec* $T_f\alpha(T_f A') = m\Lambda$, $\alpha \circ i'(b) = i(b)$ *pour* $b \in O_B$*, et* $\varphi = \frac{1}{m}\psi \circ (T_f\alpha)$*. Puisque* $\underline{\underline{t}}_{A'} \approx D(\Lambda/p\Lambda)/FD(\Lambda/p\Lambda)^{dual}$ *(voir [3]),* $\underline{\underline{t}}_{A'}$ *vérifie la condition (*). Si* $(\Lambda,\overline{\psi})$ *et* $(\Lambda',\overline{\psi}')$ *correspondent au même triplet* $(A',i',\overline{\varphi})$ *avec* $A' \underset{\alpha'}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$ *alors* $(\Lambda',\overline{\psi}') = \alpha' \circ \alpha^{-1}(\Lambda,\overline{\psi})$.

Ecrivons $X = X^p \times X_p$ *avec* $X^p = \{(\Lambda^p,\overline{\psi}) \mid (\Lambda,\overline{\psi}) \in X\}$ *et* $X_p = \{\Lambda_p \mid (\Lambda,\overline{\psi}) \in X\}$*. On peut considérer* $T_f^p A$ *comme un module libre de rang 4d sur* $\mathbb{Z}_f^p$*,* $V_f^p A$ *comme* $T_f^p A \otimes \mathbb{Q}$*, et un quelconque* Λ^p *comme un* $\mathbb{Z}_f^p$*-réseau de* $V_f^p A$ *au sens usuel. Le lemme suivant est évident.*

<u>3. Lemme</u> : L'application $G(\mathbb{A}_f^p) \longrightarrow X^p$, $g \longmapsto (g(T_f A), \varphi_A \circ g^{-1})$ *induit une bijection* $G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \xrightarrow{\approx} X^p$.

Nous avons $\Lambda_p = \text{"}\varprojlim_n\text{"} \Lambda_p^{(p^n)} \subset V_p(A) = \text{"}\varprojlim_n\text{"} A(p)^{(p^n)}$*. Pour n assez grand,* $p^n T_p A \subset \Lambda_p$ *et alors on peut identifier* $\Lambda_p^{(p^n)}$ *avec* $\Lambda_p/p^n T_p A$.

Ainsi $Ker(\Lambda_p^{(p^{n+1})} \longrightarrow \Lambda_p^{(p^n)}) = p^n T_p A/p^{n+1} T_p A \approx A_p$

et $A(p)/\Lambda_p^{(p^{n+1})} \xrightarrow{p} A(p)/\Lambda_p^{(p^n)}$ *est un isomorphisme. De plus* $A(p)/\Lambda_p^{(p^n)}$

détermine Λ_p (parce que $\Lambda_p^{(p^{n+r})} = Ker(A(p) \xrightarrow{p^r} A(p)/\Lambda_p^{(p^n)})$ pour $r \geq 0$) et le module de Dieudonné du groupe p-divisible $A(p)/\Lambda_p^{(p^n)}$ détermine celui-ci. Nous avons donc :

4. Lemme : L'application $\Lambda \longmapsto \frac{1}{p^n} D(A(p)/\Lambda_p^{(p^n)}) \subset D'A$, $n >> 0$, identifie X_p avec l'ensemble de tous les sous modules M de $D'A$ tel que :

(a) M est libre de rang $4d$ sur W ;

(b) M est stable sous F et V ;

(c) M est stable sous l'action de O_B ;

(d) M/FM vérifie la condition (*).

En résumé :

5. Théorème : Il existe une bijection

$$Y \approx H(\mathbb{Q}) \setminus G(\mathbb{A}_f^p) \times X_p/K^p$$

avec $H(\mathbb{Q}) = E'^{\times}$ dans le cas (NS) et $H(\mathbb{Q}) = B'^{\times}$ dans le cas (S).
De plus Frob agit comme 1 sur $G(\mathbb{A}_f^p)$ et par $M \longmapsto FM$ sur X_p ; l'opérateur de Hecke correspondant à $g \in G(\mathbb{A}_f^p)$ agit par multiplication sur la droite sur $G(\mathbb{A}_f^p)$.

Il reste à décrire X_p plus explicitement.

6. Lemme : Il existe une bijection

$$X_p \xrightarrow{\approx} X(\mu_1) \times \ldots \times X(\mu_m)$$

où $X(\mu_i)$ est l'ensemble de tous les sous modules M de $D'A(\mu_i)$ qui sont libres de rang $4d_i$ sur W et qui vérifient les conditions (b), (c), (d) du lemme 4 (avec $O_E \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ remplacé par $O_{E_i} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ dans (d)).

Démonstration : On a $O_E \otimes \mathbb{Z}_p \approx O_{E_1} \oplus \ldots \oplus O_{E_m}$. Soient $e_1, \ldots, e_m$ les idempotents dans $O_E \otimes \mathbb{Z}_p$ correspondants ; donc $O_{E_i} = e_i(O_E \otimes \mathbb{Z}_p)$. Remarquons que e_iM a rang $4\,d_i$ sur W parce que la trace d'un élément $\alpha \in O_E$ agissant sur M (ou A') est quatre fois sa trace dans l'extension $E \supset \mathbb{Q}$ [4, 7.6.1].
On obtient ainsi une bijection $M \longmapsto (e_1M, \ldots, e_mM)$.

Remarquons que $B_i = B \otimes E_i \approx M_2(E_i)$ agit sur $D'A(\mathfrak{p}_i)$. Soient $e_{11}, e_{21}, \ldots \in O_B \otimes O_{E_i}$ les éléments correspondant aux éléments $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \in M_2(O_{E_i})$ et écrivons $D'_i = e_{11}\, D'A(\mathfrak{p}_i)$; c'est un module de dimension $2d_i$ sur $W' = W \otimes \mathbb{Q}$. Si $M \subset D'A(\mathfrak{p}_i)$ est dans $X(\mathfrak{p}_i)$, on a $M = e_{11}M \oplus e_{22}M$ et l'application $e_{11}x \longmapsto e_{21}e_{11}x$ est un isomorphisme $e_{11}M \longrightarrow e_{22}M$ avec pour inverse $e_{22}x \longmapsto e_{12}e_{22}x$. Ainsi $e_{11}M$ détermine M, et nous avons le

7. Lemme : On peut identifier $X(\mathfrak{p}_i)$ avec l'ensemble de tous les sous modules M de D'_i tel que :

(a) M est libre de rang $2d_i$ sur W ;

(b) M est stable sous F et V ;

(c) M est stable sous O_{E_i} ;

(d) M/FM est un $O_{E_i} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$-module libre de rang 1.

8. Lemme : Soient $e_1, \ldots, e_{d_i}$ les idempotents dans $O_{E_i} \otimes W$ qui correspondent à la décomposition $O_{E_i} \otimes W \xrightarrow{\approx} W \times \ldots \times W$. Alors $N_j = e_j\, D'_i$ a dimension deux sur W' et $D'_i = N_1 \oplus \ldots \oplus N_{d_i}$. Si $F_{j\ell} : N_\ell \longrightarrow N_j$ est l'application induite par $F : D'_i \longrightarrow D'_i$, alors $F_{j\ell} = 0$ pour $\ell \not\equiv j-1 \bmod d_i$, et c'est un isomorphisme sinon. On peut choisir une base $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ pour N_1 telle que $F^{d_i} : N_1 \longrightarrow N_1$ corresponde à une matrice

$$\delta = \begin{pmatrix} p^{k_i} & 0 \\ 0 & p^{k'_i} \end{pmatrix} \quad \text{si } \mathfrak{p}_i \text{ est décomposé dans } E' \text{ (cas NS)}$$

$$= \begin{pmatrix} p^{d_i/2} & 0 \\ 0 & p^{d_i/2} \end{pmatrix} \quad \text{si } d_i \text{ est pair (cas NS ou S)}$$

$$= p^{(d_i-1)/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \text{ autrement.}$$

Démonstration : Le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 6 montre N_j à dimension deux sur W'. Soit σ l'automorphisme de Frobenius de W'.

Si l'on identifie E_i *avec un sous corps de* W', *alors l'application*

$$E_i \longrightarrow E_i \otimes_{\mathbb{Q}_p} W' \xrightarrow{\approx} W' \times \ldots \times W'$$

s'écrit $a \longmapsto (a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{d_i-1}(a))$. *Ainsi, pour* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{d_i}) \in$

$D_i' = N_1 \times \ldots \times N_{d_i}$ *et* $a \in E_i$ *on a* $a\beta = (a\beta_1, \ldots, \sigma^{j-1}(a)\ \beta_j, \ldots)$.
Puisque $aF = Fa$ *sur* D_i' *on a*

$$\sigma^{j-1}(a) \sum_\ell F_{j\ell}\ \beta_\ell = \sum_\ell F_{j\ell}\sigma^{\ell-1}(a)\beta_\ell = \sigma^\ell(a) \sum_\ell F_{j\ell}\ \beta_\ell.$$

Donc $F_{j\ell} = 0$ *si* $\ell \not\equiv j-1 \bmod d_i$. *Il est clair que* $F_{j\ell}$ *est un isomorphisme pour* $\ell \equiv j-1 \bmod d_i$ *parce que* $F : D_i' \longrightarrow D_i'$ *l'est.*

Dans le cas (NS), si $\mathfrak{p}_i$ *est décomposé en* E' *et* $k_i \neq k_i'$, *alors* N_1 *est un* $W'[F^{d_i}]$*-module de rang 2 sur* W' *dont les pentes sont* k_i *et* k_i' *(relativement à* F^{d_i}*). Ainsi, il est évident qu'il existe une base* $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ *telle que* $F^{d_i}\ \varepsilon = p^{k_i}\varepsilon$ *et* $F^{d_i}\ \varepsilon' = p^{k_i'}\ \varepsilon'$.

Dans le cas contraire, toutes les pentes de D_i' *sont égales à* $\frac{1}{2}$.
Ainsi D_i' *est une somme directe de* $W'[F]$*-modules de rang 2 sur* W' *sur lesquels* F *agit par* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}^{d_i} = \begin{pmatrix} p^{d_i/2} & 0 \\ 0 & p^{d_i/2} \end{pmatrix}$ *si* d_i *est pair et* $p^{(d_i-1)/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ *autrement,* D_i' *est évidemment un* $W'[F^{d_i}]$*-module semi simple isotypique qui achève la démonstration.*

<u>*9. Remarque*</u> : *Soient* $\overline{G}_i(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{End}_{O_B}(A(\mathfrak{p}_i))^\times$ *et* $\overline{G}_i(\mathbb{Q}_p) = (\mathrm{End}_{O_B}(A(\mathfrak{p}_i)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)^\times$. *Alors* $\overline{G}_i(\mathbb{Q}_p)$ *est le groupe multiplicatif du commutant de* B_i *dans* $\mathrm{End}_{W'[F]}(D'A(\mathfrak{p}_i))$ *où, d'après le lemme 7, le groupe multiplicatif du commutant de* E_i *dans* $\mathrm{End}_{W'[F]}(D_i')$. *Mais si, pour* $\alpha \in \mathrm{End}_{W'[F^{d_i}]}(N_1)$ *et* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{d_i}) \in D_i'$, *on pose* $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_{d_i}) = (\alpha\beta_1, \ldots, \alpha\beta_{d_i})$ *alors* $\mathrm{End}_{W'[F^{d_i}]}(N_1)$ *est identifié avec ce dernier commutant. Ainsi*

$$\begin{aligned} \overline{G}_i(\mathbb{Q}_p) &= \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in E_i,\ ab \neq 0\} \quad \text{en cas (NS), } k \neq k_i' \\ &= GL_2(E_i) \quad d_i \text{ pair, autrement} \\ &= \mathbb{H}^\times \quad d_i \text{ impair, autrement, où } \mathbb{H} \text{ est l'algèbre de quaternion sur } E_i. \end{aligned}$$

10. Lemme : On peut identifier $X(\mu_i)$ avec l'ensemble des suites de réseaux $(L_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ dans $W' \times W'$ tels que

(a) $L_j \underset{\neq}{\supset} L_{j-1} \underset{\neq}{\supset} pL_j$

(b) $\sigma^{d_i} \delta L_{j+d_i} = L_j$ avec le δ du lemme 8.

Démonstration : Pour $M \in X(\mu)$, on a $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_{d_i}$ avec $M_j = e_j M$. Puisque $FM = FM_{d_i} \oplus FM_1 \oplus \ldots \oplus FM_{d_i-1}$ avec $FM_j \subset N_{j+1}$, les conditions (b) et (d) du lemme 7 entraînent que $FM_{d_i} \subset M_1$, $FM_1 \subset M_2, \ldots$ et que les M_1/FM_{d_i}, $M_2/FM_1, \ldots$ ont dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Choisissons une base $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ pour N_1 comme dans le lemme 8 et soit $\varphi_j : N_j \xrightarrow{\approx} W' \times W'$ l'application $a(F^j\varepsilon) + b(F^j\varepsilon') \longmapsto (\sigma^{1-j}(a), \sigma^{1-j}(b))$. Remarquons que $\varphi_{j+1}F(x) = \varphi_j(x)$ et $\varphi_j(F^{d_i}x) = \sigma^{d_i} \delta\, \varphi_j(x)$. On pose $L_j = \varphi_j(M_j)$ pour $1 \leq j \leq d_i$ et $L_{j-d_i} = \varphi_j(F^{d_i} M_j) = \sigma^{d_i} \delta L_j$.

11. Remarque : $\mathrm{Frob}(L_j)_{j \in \mathbb{Z}} = (L'_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ avec $L'_j = L_{j-1}$. E'_i (ou $B'_i = B' \otimes_E E_i$) agit sur $X(\mu_i)$ via le plongement $E'_i \hookrightarrow \overline{G}_i(\mathbb{Q}_p)$ (ou $B'_i \hookrightarrow \overline{G}_i(\mathbb{Q}_p)$). $H(\mathbb{Q})$ agit sur $X(\mu_i)$ via le plongement évident $H(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \overline{G}(\mathbb{Q}_p)$.

En résumé :

12. Théorème : $X_p \approx X(\mu_1) \times \ldots \times X(\mu_m)$ où $X(\mu_i)$ est l'ensemble des suites de réseaux satisfaisant aux conditions du lemme 10, et Frob et $H(\mathbb{Q})$ agissent comme il a été dit dans la remarque 11.

13. Remarque : Soient Ω l'extension maximale non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et O_Ω l'anneau des entiers dans Ω. On sait que W' est le complété de Ω. On peut écrire $D'A = \tilde{D}'A \otimes_\Omega W'$ avec $\tilde{D}'A$ un module sur $\Omega[F]$ (voir [2, p. 85]). Si M est comme dans le lemme 4, alors M est l'image de $D'\alpha : D'A' \longrightarrow D'A$ pour une certaine isogénie $\alpha : A' \longrightarrow A$. Puisque α est définie sur un sous corps fini k de $\overline{\mathbb{F}}_p$, et $W'_k \subset \Omega$, nous avons $M = \tilde{M} \otimes_\Omega W'$ pour un sous module $\tilde{M} \subset \tilde{D}'A$. Donc on peut identifier X_p avec un ensemble de sous module de $\tilde{D}'A$,

et $X(\mu_i)$ *avec l'ensemble de suites de réseaux* $(L_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $L_j \subset \Omega \times \Omega$ *,*
qui vérifient les conditions du lemme 10.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *L. BREEN : Exposé au séminaire.*

[2] *M. DEMAZURE : Lectures on p-divisible groups. Springer Lecture Notes 302 (1972).*

[3] *J. MILNE : Points on Shimura Varieties Mod p. Proc. Symp. in Pure Math. Vol. 33 A.M.S. (à paraître).*

[4] *G. SHIMURA : Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions. Princeton U.P. 1971.*

[1] is only a summary of [3].

Notation :

G est le schéma en groupes sur $\mathbb{Z}$ *tel que* $G(R) = (O_B^{opp} \otimes R)^{\times}$ *pour un anneau R quelconque.* $V(R)$ *est le* $O_B \otimes R$*-module* $O_B \otimes R$. $\mathbb{A}$ *est l'anneau d'adèles pour* $\mathbb{Q}$; $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f^p \times \mathbb{Q}_p^{\times}$;

$$\mathbb{A}_f = \mathbb{Z}_f \otimes \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}_f = \varprojlim_n \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_f^p \times \mathbb{Z}_p.$$

K est un suffisamment petit sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{Z}_f)$.
Deux isomorphismes $T \underset{\varphi'}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} V(\mathbb{Z}_f)$ *sont K-équivalents si il existe* $k \in K$ *tel que* $\varphi = k \circ \varphi'$.

Pour A une variété abélienne, $End^{O}(A) = End(A) \otimes \mathbb{Q}$, $A_m = Ker(m : A \longrightarrow A)$
$A(p) = \varinjlim_n A_{p^n}$, $T_f A = "\varprojlim" A_n$, $T_f^p A = \varprojlim_{(n,p)=1} A_n$, *et* $V_f^p A = T_f^p A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

W est l'anneau des vecteurs de Witt sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ *et* $W' = W \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$; *DN est le module de Dieudonné du groupe fini N,* $DA = DA(p) = \varprojlim_n DA_{p^n}$, *et* $D'A = DA \otimes \mathbb{Q}$.

Frob désigne le morphisme de Frobenius absolu sur la variété de Shimura sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ *attachée au groupe G.*